**ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α:**

**Α1:** Να αποδείξετε ότι : Οι συντεταγμένες (x , y) ενός διανύσματος με άκρα τα σημεία

 Α(x1 , y1) και Β(x2 , y2) δίνονται από τις σχέσεις x = x2 – x1 , y = y2 – y1.

 **(Μον. 10)**

**Α2:** Τι ονομάζουμε παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ;

 **(Mον. 5)**

**Α3:** Από τις παρακάτω προτάσεις ποιες είναι σωστές και ποιες λάθος;

 **α)** Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα

 **β)**  Αν  είναι δύο διανύσματα με  τότε 

 **γ)** Το διάνυσμα  είναι κάθετο στην ευθεία Αx + Βy + Γ = 0

 **δ)** Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο 

 **ε)** Η εκκεντρότητα μιάς έλλειψης είναι πάντοτε μικρότερη από τη μονάδα.

 **(Μον. 5 x 2 = 10)**

**ΘΕΜΑ Β:**

Δίνονται τα διανύσματα  και 

**Β1:** Να δείξετε ότι  και  **(Μον. 4 + 4 = 8)**

**Β2:** Να γράψετε το διάνυσμα  ως γραμμικό συνδυασμό των  (**Μον. 9)**

**Β3:** Να βρείτε τη γωνία  των διανυσμάτων  **(Μον. 8)**

**ΘΕΜΑ Γ:**

Δίνεται η εξίσωση : x2 + y2 – 2x + 4y – 20 = 0

**Γ1:** Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο (C1) , και να βρείτε τις συν/νες του κέντρου του Κ

 και την ακτίνα του ρ. **(Μον. 2 + 2 + 2 =6)**

**Γ2:** Να βρείτε την εξίσωση της χορδής (ε) του κύκλου (C1) που έχει μέσον το

 σημείο  **(Μον. 6)**

**Γ3:** Εστω ότι η (ε) έχει εξίσωση 6x + 8y – 15 = 0. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης

 του κύκλου (C1) που είναι παράλληλη προς την (ε). **(Μον. 7)**

**Γ4:** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C2) που είναι ομόκεντρος του (C1) και

 εφάπτεται στον άξονα x′x. **(Μον. 6)**

**ΘΕΜΑ Δ:**

Στο σύστημα των αξόνων Οxy δίνονται τα σταθερά σημεία Ε′( –3 , 0) και Ε(3 , 0).

Ένα σημείο Μ(x , y) κινείται στο επίπεδο έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

|(ΜΕ′) – (ΜΕ)| = 2014 και |(ΜΕ′)2 – (ΜΕ)2| = 20140

**Δ1:** Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου

 Μ είναι η έλλειψη  **(Μον. 8)**

**Δ2:** Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής (C)

 της οποίας η εστία συμπίπτει με την εστία

 Ε της έλλειψης. **(Μον. 5)**

**Δ3:** Εστω (C) : y2 = 12x. Να βρείτε την εξίσωση

 της εφαπτομένης (ε) της παραβολής , η οποία

 σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 45ο.

 Να δείξετε ότι η (ε) διέρχεται από την εστία

 Ε′ της έλλειψης. **(Μον. 5 + 2 =7)**

**Δ4:** Αν η (ε) τέμνει την έλλειψη στα σημεία Κ

 και Λ , να υπολογίσετε την περίμετρο του

 τριγώνου ΕΚΛ. **(Μον. 5)**

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α:**

**Α1:** Σχολ. Βιβλίο σελ .33

**Α2:** Σχολ. Βιβλίο σελ. 89

**Α3:** α) Σωστό , β) Σωστό , γ) Λάθος , δ) Λάθος , ε) Σωστό

**ΘΕΜΑ Β:**

**Β1:** Είναι (3,1)∙(-2,6) = – 6 + 6 = 0 , άρα 

 Επίσης 

 

**Β2:** Εστω $\vec{γ}$ = κ$\vec{α}+μ\vec{β}$ , τότε

 (4,8) = κ(3,1) + μ(-2,6) = (3κ , κ) +(-2μ,6μ) = (3κ-2μ , κ + 6μ) , άρα

 $\left\{\begin{array}{c}3κ-2μ=4\\κ+6μ=8\end{array}\right\}$ Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε κ = 2 και μ = 1

 Αρα $\vec{γ}=2\vec{α}+\vec{β}$

**Β3:** Είναι συνω =  άρα =π/4

**ΘΕΜΑ Γ:**

**Γ1:** Είναι Α2 + Β2 – 4Γ = (-2)2 + 42 – 4(– 20) = …=100 > 0 , άρα παριστάνει κύκλο ,

 με κέντρο  δηλ. Κ(1, -2) και ακτίνα 

**Γ2:** Είναι  , άρα  οπότε η (ε) έχει εξίσωση

 

**Γ3:** Εστω (ζ) : y = λx + β μία ευθεία παράλληλη προς την (ε) , τότε 

 άρα η (ζ) έχει εξίσωση 

 Η (ζ) για να είναι εφαπτομένη του κύκλου , αρκεί d(Κ , ζ) = ρ , δηλ.

  άρα (5 + 4β = 25 ή 5 + 4β = -25) άρα

 (β = 5 ή β = ) άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες παράλληλες προς την (ε) οι:

 ζ1  : 3x + 4y – 20 = 0 και ζ2 : 3x + 4y + 30 = 0

**Γ4:** Ο κύκλος (C2) έχει κέντρο το Κ(1,-2) και ακτίνα R = |-2| = 2 , αφού εφάπτεται

 στον άξονα x′x , άρα έχει εξίσωση (x – 1)2 + (y + 2)2 = 4

**ΘΕΜΑ Δ:**

**Δ1:** Η δεύτερη σχέση γράφεται :

 | [(ΜΕ′) – (ΜΕ)]∙[(ΜΕ′) +(ΜΕ)] | = 20140 ⇔ |(ΜΕ′) – (ΜΕ)|∙|(ΜΕ′) + (ΜΕ)| = 20140 ⇔

 2014 ∙|(ΜΕ′) + (ΜΕ)| = 20140 ⇔ (ΜΕ′) + ΜΕ) = 10 = σταθ.

 άρα (από τον ορισμό της έλλειψης) προκύπτει ότι ο γ.τ. των σημείων Μ είναι η

 έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε′ , Ε και σταθερό άθροισμα 2α = 10 , άρα α = 5 ,

 2γ = (Ε′Ε) = 6 , άρα γ = 3 , οπότε β2 = α2 – γ2 = 25 – 9 = 16 , επομένως

 ο ζητούμενος γ.τ. είναι η έλλειψη 

**Δ2:** Η παραβολή (C) έχει εξίσωση y2 = 2ρx , με εστία Ε(3,0) , άρα 

 οπότε (C) : y2 = 2∙6∙x ⇔ y2 = 12x

**Δ3:** Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο της Δ(x1 , y1) έχει εξίσωση

 y1y = ρ(x + x1) ⇔ y1y = 6(x + x1) ⇔ 6x – y1y + 6x1 = 0 ⇔ . Επειδή σχηματίζει

 γωνία 45ο με τον άξονα x′x , θα ισχύει λε = εφ45ο = 1 , άρα 

 Το σημείο Δ(x1 , y1) είναι σημείο της παραβολής , άρα .

 Αρα Δ(3,6) , οπότε η (ε) έχει εξίσωση 6x – 6y + 6∙3 = 0 ⇔ x – y + 3 = 0.

 Η (ε) διέρχεται από την εστία Ε′(-3,0) αφού οι συν/νες της την επαληθεύουν.

**Δ4:** Η περίμετρος του τριγώνου ΕΚΛ είναι

 Π = (ΕΚ) + (ΚΛ) + (ΛΕ) = [(ΕΚ) +(ΚΕ′)] + [(Ε′Λ) + (ΛΕ)] = 2α + 2α = 10 + 10 = 20